

# MODEL MATEMATIKA ALIRAN TAK TUNAK PADA *NANO FLUID* MELEWATI BOLA TERIRIS DENGAN PENGARUH MEDAN MAGNET

Yunita Nur Afifah<sup>1</sup>, Bayu Charisma Putra<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Teknik Mesin, Fakultas Teknik  
Universitas Maarif Hasyim Latif, Sidoarjo, Indonesia  
e-mail : yunita@dosen.umaha.ac.id

<sup>2</sup>Teknik Informatika, Fakultas Teknik  
Universitas Maarif Hasyim Latif, Sidoarjo, Indonesia  
e-mail : bayu\_charisma@dosen.umaha.ac.id

Diterima: 14 September 2018. Disetujui : 5 Desember 2018. Dipublikasikan : 10 Desember 2018



©2018 –TESJ Fakultas Teknik Universitas Maarif Hasyim Latif. Ini adalah artikel dengan akses terbuka di bawah lisensi CC BY 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

## ABSTRAK

Model matematika adalah suatu representasi sederhana dari suatu fenomena atau peristiwa alam yang terjadi untuk disajikan dalam konsep matematis. Dari fenomena tersebut maka terbentuklah persamaan matematika yang lebih sederhana dan mudah untuk diselesaikan. *Nano fluid* adalah salah satu fluida baru yang memiliki keunikan karakteristik tersendiri. Komponen *nano fluid* adalah campuran fluida cair dengan partikel nano yang memiliki ukuran antara 1-100 nm. Terdapat sifat karakteristik dari fluida nano yaitu densitas fluida nano, viskositas, kalor spesifik fluida nano, dan konduktifitas termal. Pada penelitian ini, bertujuan untuk memperoleh sebuah model matematika aliran tak tunak pada *nano fluid* melewati bola teriris dengan pengaruh medan magnet. Untuk memperoleh model tersebut maka dibentuklah persamaan pembangun berdimensi dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan *energy equation*. Dari *dimensional equation* ditransformasikan ke dalam bentuk *non-dimensional equation*. Kemudian diklasifikasikan dalam bentuk *similarity equation* menggunakan teori pada lapisan batas. Hasil dari penelitian ini adalah diketahui pengaruh medan magnet pada aliran tak tunak *nano fluid* yang melewati bola teriris.

**Kata kunci:** aliran tak tunak, bola teriris, medan magnet, *nano fluid*

## PENDAHULUAN

Model matematika merupakan suatu representasi sederhana dari suatu fenomena atau peristiwa alam yang terjadi untuk disajikan dalam konsep matematis. Sebagian besar peneliti saat ini menggunakan model matematika untuk digunakan sebagai dasar dari penelitian-penelitian yang sedang dilakukan dengan tujuan memudahkan dalam proses penyelesaian. Bidang ilmu matematika dengan penerapan model matematika dikelompokkan sebagai bidang matematika terapan. Dalam fenomena kasus fluida dibutuhkan model matematika untuk menyelesaikan kasus tersebut secara numerik dengan harapan mempermudah penyelesaian dalam masalah tersebut.

*Nano fluid* adalah salah satu fluida baru yang memiliki keunikan karakteristik tersendiri. Komponen *nano fluid* adalah campuran fluida cair dengan partikel nano yang memiliki ukuran antara 1-100 nm. Terdapat sifat karakteristik dari fluida

nano yaitu densitas fluida nano, viskositas, kalor spesifik fluida nano, dan konduktifitas termal. Fluida yang digunakan pada penelitian ini adalah fluida nano yang termasuk dalam fluida *Newtonian*.

Aliran tak tunak merupakan aliran kecepatan yang mengakibatkan perubahan suatu variabel dan waktu pada tempat tertentu. Aliran dengan penggunaan fluida nano dengan karakteristik fluida nano yang unik mengakibatkan meningkatnya interaksi dan tumbukan antar partikel, fluida dan permukaan yang dilaluinya sehingga memicu adanya lapisan-lapisan batas pada permukaan benda.

Tahapan terbentuknya model matematika dalam penelitian ini adalah berasal dari pengembangan persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi yang disebut dengan persamaan *dimensional*. Selanjutnya dari persamaan tersebut ditransformasikan ke bentuk persamaan *non-dimensional*, dengan menggunakan persamaan teori lapisan batas (*boundary layer*

theory equation) maka diperoleh persamaan similaritasnya.

**METODE PENELITIAN**

**Literature Study**

Dalam hal ini peneliti melakukan *literature Study* terhadap hal apa saja yang berkaitan dengan proses penelitian, misal mengenai karakteristik *nano fluid*, aliran tak tunak, lapisan batas, medan magnet, bola teriris, dan lain-lain yang berkaitan dengan fenomena penelitian yang dilakukan.

**Pengumpulan Data**

Tahap ini dilakukan pengumpulan data dengan cara menentukan variabel-variabel yang berhubungan dengan kecepatan dan temperatur yang terjadi pada aliran fluida. Variabel-variabel yang mempengaruhi pada studi kasus ini adalah sebagai berikut:

1. Densitas *nano fluid*

$$\rho_{nf} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s \tag{1}$$

2. Viskositas

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\chi)^{2.5}} \tag{2}$$

3. Konduktifitas termal

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{(k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)} \tag{3}$$

4. Parameter magnetic

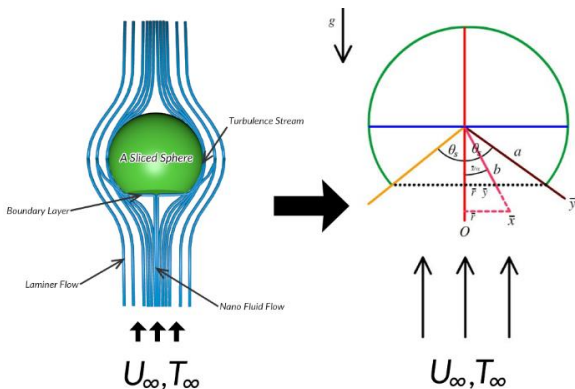
$$M = \frac{\sigma B_0^2 \bar{v}}{\rho_{nf} U_\infty} \tag{4}$$

5. Bilangan Prandtl

$$Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f} \tag{5}$$

**Pembangunan Model Matematika**

Setiap model memiliki bentuk karakteristik tertentu. Pada tahap ini dikaji model matematika aliran tak tunak *nano fluid* melewati bola teriris dengan pengaruh medan magnet. Dalam kaitannya model yang dikaji terlebih dahulu adalah model fisik yang sesuai dengan harapan.



Gambar 1. Model Fisik Bola teriris

Tahap-tahap dalam penyusunan model matematika yaitu sebagai berikut:

1. Membangun persamaan *dimensional* dalam bentuk model matematika yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi.
2. Menentukan *boundary condition* untuk membentuk persamaan pembangun dalam model matematika.
3. Mentransformasikan persamaan *dimensional* ke dalam persamaan *non-dimensional* kemudian dikelompokkan ke persamaan similaritas dengan menggunakan teori pada lapisan batas.
4. Menyederhanakan model matematika dengan pendekatan fungsi alir (*stream function*).
5. Menentukan model matematika dari aliran tak tunak pada nano fluid melewati bola teriris dengan pengaruh medan magnet.
6. Mencari pengaruh medan magnet dari model matematika yang telah dibangun.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Persamaan pembangun yang digunakan dalam penelitian ini adalah berasal dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Bentuk persamaan yang digunakan tersebut adalah sebagai berikut

1. Persamaan kontinuitas

Diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisis terletak pada bidang *xoy*

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

Dinotasikan dalam bentuk notasi vektor

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \rho_{nf}(\nabla \cdot \bar{V}) = 0 \tag{7}$$

Karena pada penelitian bersifat *incompressible* maka  $\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} = 0$  maka

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \tag{8}$$

2. Persamaan momentum

Dari persamaan kontinuitas dan sifat divergensi maka persamaan tersebut menjadi

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \tag{9}$$

Dengan  $\sum F$  adalah komponen gaya-gaya yang bekerja dipermukaan maka

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) \delta x \delta y \delta z = F_s + F_{mag} \tag{10}$$

Dengan  $F_s$  adalah gaya permukaan dan  $F_{mag}$  adalah gaya magnet bentuk tegangan-tegangan pada permukaan dengan menjumlahkan seluruh gaya pada arah *x* dan *y*

$$F_{sx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z, \tag{11}$$

$$F_{sy} = \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z$$

Sehingga terbentuk persamaan dari resultan gaya permukaannya

$$F_s = \left( \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z \right) \hat{i} +$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \hat{j} \quad (12)$$

Untuk fluida Newtonian tak mampu-mampat, diketahui bahwa tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi sehingga

- Tegangan normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (14)$$

- Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (15)$$

Dengan mensubstitusikan tegangan normal dan tegangan geser maka persamaannya menjadi

$$\frac{F_s}{\delta x \delta y \delta z} = -\nabla p + \mu_{nf} \nabla^2 \bar{V} \quad (16)$$

Gaya magnet yang terbentuk dari gaya Lorentz

$$\frac{F_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = -\sigma B_0^2 \bar{V} \quad (17)$$

Dari persamaan (10) maka terbentuk persamaan momentum sebagai berikut

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{V} - \sigma B_0^2 \bar{V} \quad (18)$$

Atau dapat dituliskan

$$\left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right) = -\frac{1}{\rho_{nf}} \nabla p + \nu_{nf} \nabla^2 \bar{V} - \frac{1}{\rho_{nf}} \sigma B_0^2 \bar{V} \quad (19)$$

### 3. Persamaan energi

Berlakunya hukum I Termodinamika akibat adanya energi akibat tumbukan partikel dalam fluida yaitu mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Hukum tersebut dapat dituliskan dalam persamaan energi menurut (Alkawasbeh, 2015)

$$(\bar{V} \cdot \nabla) T = \alpha_{nf} \nabla^2 T \quad (20)$$

Karena *unsteady flow* maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$(\rho C_p)_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot (\nabla T) \right) = k_{nf} \nabla^2 T \quad (21)$$

Atau dapat dituliskan

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (22)$$

Dengan

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (23)$$

### Model Matematika Dimensional

Penurunan persamaan pembangun

#### 1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

#### 2. Persamaan momentum

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 \bar{u}}{\rho_{nf}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 \bar{v}}{\rho_{nf}} \quad (26)$$

#### 3. Persamaan Energi

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

Dengan kondisi awal dan kondisi batas untuk  $0 \leq x \leq \theta_s$

$\bar{t} < 0; \bar{u} = \bar{v} = 0$  untuk setiap  $x \cdot y$

$\bar{t} \geq 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, T \rightarrow T_\infty$ , pada saat  $\bar{y} = b - a$

$\bar{u} = \bar{u}_e(x), T \rightarrow T_\infty$ , pada saat  $y \rightarrow \infty$

Dengan  $\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{x}{b}\right)$

### Model Matematika Non-Dimensional

Untuk merubah model matematika dimensional menjadi model matematika non-dimensional maka diberikan variabel-variabel non-dimensional yang digunakan yaitu sebagai berikut:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = R_e^{1/2} \left| \frac{\bar{y}}{a} \right|, R_e = \frac{u_\infty a}{\nu_{nf}}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = R_e^{1/2} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), \nu_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}, u_e(x) = \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{v_\infty}, r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, p = \frac{\bar{p}}{\rho_{nf} U_\infty^2}, t = \frac{U_{inf} t \bar{y}}{a}, \theta = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}$$

substitusikan persamaan-persamaan di atas ke dalam persamaan dimensional sehingga terbentuk persamaan *non-dimensional* seperti berikut:

#### 1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

#### 2. Persamaan momentum

Arah sumbu - x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu \quad (29)$$

Arah sumbu - y

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu_{nf}}{a U_\infty Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\nu_{nf}}{a U_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} Mv \quad (30)$$

#### 3. Persamaan energi

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \quad (31)$$

Kondisi awal dan kondisi batas untuk  $0^0 \leq x \leq \theta_s$  diberikan sebagai berikut:

$\bar{t} < 0$  maka  $t < 0, \bar{t} \geq 0$  maka  $t \geq 0$

$t < 0 : u = v = 0$ , saat  $x, y$

$t \geq 0 : u = v = 0$ , maka  $y = 0$

$u = u_e(x), T \rightarrow T_\infty$ , pada saat  $y \rightarrow \infty$

Dengan  $u_e = \frac{3}{2} \sin\left(x \frac{\cos \alpha}{\cos x}\right)$  dan  $b = \frac{\cos \alpha}{\cos x} a$

### Penyederhanaan Pada Lapisan Batas

Penyederhanaan model *non-dimensional* dengan pendekatan pada lapisan batas, dengan  $Re \rightarrow \infty$  sehingga berakibat  $Re \rightarrow 0$

#### 1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (32)$$

#### 2. Persamaan momentum

Arah sumbu -x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu \quad (33)$$

Arah sumbu -y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{34}$$

3. Persamaan energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{35}$$

Pada persamaan momentum sumbu  $y$  terlihat bahwa tekanan fluida  $p$  adalah variabel bebas terhadap  $y$  sehingga dapat disimpulkan bahwa tekanan aliran hanya bergantung pada variabel  $x$ , maka persamaan momentum dan persamaan energi yang digunakan sebagai pembangun model pada penelitian ini adalah

1. Persamaan momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_{nf}}{\nu_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu \tag{36}$$

2. Persamaan energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{37}$$

Selanjutnya substitusikan beberapa variabel dan persamaan sebagai berikut:

$$\rho_{nf} = (1-x)\rho_f + x\rho_s$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-x)^{2.5}}$$

Sehingga pada fluida yang melewati permukaan bola pada daerah di luar lapisan batas persamaan momentum dan persamaan energi di atas dapat ditulis sebagai berikut:

1. Persamaan momentum

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-x)^{2.5}[(1-x)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu_e \tag{38}$$

2. Persamaan energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s+2k_f)-2x(k_f-k_s)}{(k_s+2k_f)+x(k_f-k_s)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{39}$$

Karena kecepatan aliran bebas  $u_e = \frac{3}{2} \left( x \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$  maka diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \tag{40}$$

Dari penyederhanaan model matematika diatas maka model matematika *non-dimensional* dapat ditulis sebagai berikut

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \tag{41}$$

2. Persamaan momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-x)^{2.5}[(1-x)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u_e - u) \tag{42}$$

3. Persamaan energi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{(\rho(k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s))[(1-x)+\chi\rho_{ND}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{43}$$

Saat kondisi awal dan kondisi batas

$t < 0; u = v = 0$ , untuk setiap  $x, y$

$t \geq 0; u = v = 0$  pada saat  $y = 0$

$u = u_e(x), T \rightarrow T_\infty$  pada saat  $y \rightarrow \infty$

Dengan  $u_e = \frac{3}{2} \sin \left( x \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$  dan  $b = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} a$

### Fungsi Alir (Stream Function)

Fungsi alir atau fungsi arus adalah suatu fungsi yang digunakan untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan yaitu komponen kecepatan  $u$  yang alirannya berada pada arah  $x$  dan  $v$  berada pada arah  $y$ . dengan adanya fungsi alir ( $\psi$ ) untuk fluida yang melewati permukaan bola dapat menyederhanakan banyak persamaan dan secara komputasi dapat dibuat dalam satu variabel. Fungsi alir dapat dinyatakan sebagai berikut (Mohammad, 2014)

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{44}$$

Setelah mensubstitusikan persamaan (38) ke dalam model matematika *non-dimensional* maka persamaan tersebut menjadi

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tag{45}$$

2. Persamaan momentum

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-x)^{2.5}[(1-x)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \tag{46}$$

3. Persamaan energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{47}$$

Dengan kondisi batas;

$t < 0: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 0$  untuk setiap  $x, y$

$t \geq 0: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 1$  pada saat  $y = 0$

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), \theta = 0$  pada saat  $y \rightarrow \infty$

$u_e = \frac{3}{2} \sin \left( x \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$  dan  $b = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} a$

### Persamaan Similaritas

Pada saat aliran fluida melewati *Stagnation Point* ( $x = 0^\circ$ ) maka persamaan similaritas pada persamaan momentum dan energi menjadi

1. Persamaan momentum

$$\left[ \frac{1}{(1-x)^{2.5}[(1-x)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \cos \alpha t \left( 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 - F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} \tag{48}$$

2. Persamaan energi

$$\frac{(k_s+\partial k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{(k_s+\partial k_f)+\chi(k_f-k_s)(1-x)+\chi\rho_{ND}} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{3}{2\cos \alpha} \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \tag{49}$$

Sehingga diperoleh persamaan differensial biasa sebagai berikut

1. Persamaan momentum

$$\left[ \frac{1}{(1-x)^{2.5}[(1-x)+(\chi\rho_{ND})]} \right] F''' + \frac{3}{2\cos \alpha} t(1 - (F')^2 - FF'') + Mt(1 - F') = \frac{F''}{\partial t} \tag{50}$$

2. Persamaan energi

$$\frac{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{(k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)[(1-\chi)+\chi\rho C_{ND}]} S'' + \frac{3}{2\cos\alpha} PrFS' = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (51)$$

Dengan kondisi batas

$$t < 0: F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 0, t \geq 0: F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1$$

Dengan " " " " adalah notasi turunan terhadap y

### PENUTUP

Berdasarkan pembangunan model matematika sehingga mendapatkan 3 persamaan yang digunakan yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Selanjutnya dari persamaan dimensional dijadikan persamaan non-dimensional dengan mensubstitusikan parameter-parameternya. Menyederhanakannya dengan menggunakan fungsi alir dengan tujuan dapat menghubungkan dua fungsi kecepatan pada aliran, dan terakhir mentransformasikan ke bentuk persamaan similaritas untuk mendapatkan hasil akhir dari model matematikanya. Dari model matematika aliran tak tunak pada nano fluid melewati bola teriris dengan pengaruh medan magnet dapat diketahui bentuk parameter-parameter dalam persamaan yang digunakan dan pengaruh medan magnetnya, sehingga dapat dilihat pengaruh medan magnet berbanding lurus dengan kecepatannya akan tetapi berbanding terbalik terhadap temperaturnya. Dapat disimpulkan semakin besar parameter magnetiknya maka semakin besar pula kecepatannya akan tetapi temperaturnya semakin menurun.

Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan penyelesaian secara numerik agar dapat diketahui secara numerik dan disimulasikan dengan menggunakan program sehingga dapat diketahui pengaruh profil kecepatan dan temperatur pada model yang telah dibentuk.

### DAFTAR PUSTAKA

Alkassabeh, H. T. S. (2015). Numerical solutions for convective boundary layer flow over a solid sphere of Newtonian and non-Newtonian fluids. Ph. D. Universiti Malaysia Pahang.

Cheng, C.-Y. (2012). Free convection boundary layer flow over a horizontal cylinder of elliptic cross section in porous media saturated by a nanofluid. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(7), 931-936.

Harlow, H. F. (1983). Fundamentals for preparing psychology journal articles. *Journal of Comparative and Physiological Psychology*, 55, 893-896.

Kasim, A. R. M. (2014). *Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid*. Fakulti Sains, Universiti Teknologi Malaysia.

Mohammad, N. F. (2014). Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere in Viscous and Micropolar Fluids. *Universiti Technology Malaysia, Malaysia*.

Potter, M. C., Wiggert, D. C., & Ramadan, B. H. (2012). *Mechanics of Fluids* (Fourth Edi). USA: Cengage Learning.

Salleh, M. Z., Nazar, R., & Pop, I. (2010). Modeling of free convection boundary layer flow on a solid sphere with Newtonian heating. *Acta Applicandae Mathematicae*, 112(3), 263-274.

Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G. O., & Rahayuningsih, T. (2016). VISCOELASTIC FLUID FLOW PASS A POROUS CIRCULAR CYLINDER WHEN THE MAGNETIC FIELD INCLUDED. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 99(2), 173.

Widodo, B., Khalimah, D. A., Zainal, F. D. S., & Imron, C. (2015). The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow Of A Viscous Fluid Past A Sphere. In *International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE)*.

Halaman ini sengaja dikosongkan